

9

Perturbaciones orbitales producidas por la inducción gravitatoria

1.9 Introducción

Un cuerpo en rotación produce un campo gravitoelectromagnético que origina una perturbación de la órbita kepleriana de un satélite que gira a su alrededor y que viene expresada por la modificación de sus elementos orbitales. Si el campo gravitatorio es débil y la velocidad de rotación del cuerpo que produce el campo es pequeña en comparación con c , se puede usar la ecuación de movimiento (12.4), que toma la forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi + \mathbf{W},$$

en nuestro caso \mathbf{W} es pequeña en comparación con la aceleración kepleriana, por lo que puede entenderse como la aceleración perturbativa, que puede ser dividida en tres términos

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{GE} + \mathbf{W}_{GM}.$$

El primero de ellos es la aceleración gravitoelectrónica responsable de la precesión de Einstein

$$\mathbf{W}_E = -\nabla\left(\frac{2\phi^2}{c^2}\right) + 4\frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi - \frac{v^2}{c^2}\nabla\phi + 3\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

mientras que

$$\mathbf{W}_{GE} = -\frac{1}{c^2}\nabla\psi$$

es la aceleración perturbativa generada por la inducción gravitoelectrónica. Finalmente

$$\mathbf{W}_{GM} = -4\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + 4\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A}) \quad (1.9)$$

es la aceleración perturbativa gravitomagnética. También debemos de tener presente que en la aceleración kepleriana

$$\mathbf{W}_K = -\nabla\phi$$

se encuentran incluidos términos inductivos, puesto que ϕ es el potencial kepleriano más los términos derivados del desarrollo de los potenciales retardados, tal como se indica en la ecuación (23.4). No obstante, en el caso que estamos considerando de un cuerpo esférico de una densidad homogénea que permanece constante, el potencial ϕ

coincide con el potencial clásico kepleriano y no ocasiona, por tanto, perturbaciones en la órbita de los satélites.

2.9 Sistemas de coordenadas

El sistema de coordenadas pseudocartesianas $K(x, y, z)$ tiene su origen en el astro central que suponemos la Tierra, el eje z coincide en dirección y sentido con su eje de rotación y el eje x se dirige hacia el equinoccio de primavera o nodo ascendente de la órbita terrestre en torno al Sol.

El sistema $K'(X, Y, Z)$ tiene su origen en el centro de la Tierra, el eje X se dirige hacia el nodo ascendente de la órbita del satélite y el plano $X-Y$ es por donde se mueve el satélite.

Bajo estas premisas el ángulo entre los ejes x y X es la longitud del nodo ascendente Ω (medida por el ecuador) y el ángulo entre z y Z es la inclinación de la órbita i respecto al ecuador celeste.

Para pasar del sistema K al K' es necesario hacer dos rotaciones. La primera de ellas de valor Ω alrededor del eje Z , y la segunda una rotación de ángulo i en torno al eje X . Por tanto los vectores básicos del sistema K' ($\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$) están relacionados con los vectores básicos del sistema K ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) por

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_X &= \cos \Omega \mathbf{e}_x + \sin \Omega \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_Y &= -\cos i \sin \Omega \mathbf{e}_x + \cos i \cos \Omega \mathbf{e}_y + \sin i \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_Z &= \sin i \sin \Omega \mathbf{e}_x - \sin i \cos \Omega \mathbf{e}_y + \cos i \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Ahora es necesario obtener los vectores unitarios asociados con el triedro comóvil en las direcciones radial \mathbf{e}_r , transversal \mathbf{e}_t y normal \mathbf{e}_n . El vector unitario radial se encuentra en el plano $X-Y$ y es paralelo a \mathbf{r} (vector de posición del satélite), entonces

$$\mathbf{e}_r = \cos u \mathbf{e}_X + \sin u \mathbf{e}_Y$$

donde u es el ángulo contado desde el nodo ascendente hasta el satélite

$$u = \theta + \omega$$

θ es la anomalía verdadera, mientras que ω es el argumento de latitud del pericentro, es decir, ángulo contado desde el nodo ascendente hasta el pericentro. El vector unitario transversal del satélite es perpendicular al anterior y también se encuentra en el plano de la órbita

$$\mathbf{e}_t = -\sin u \mathbf{e}_X + \cos u \mathbf{e}_Y$$

finalmente el vector unitario normal es perpendicular al plano orbital

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_Z.$$

Para simplificar los cálculos vamos a suponer que el nodo ascendente del satélite coincide con el equinoccio, por tanto $\Omega = 0$, lo que no significa ninguna pérdida de generalidad, porque cualquier otro valor de Ω originaría una situación idéntica a la anterior.

Los vectores básicos comóviles en función de los vectores unitarios de K quedan

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \cos u \mathbf{e}_x + \cos i \sin u \mathbf{e}_y + \sin i \sin u \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_t &= -\sin u \mathbf{e}_x + \cos i \cos u \mathbf{e}_y + \sin i \cos u \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_n &= -\sin i \mathbf{e}_y + \cos i \mathbf{e}_z.\end{aligned}\tag{2.9}$$

3.9 Cálculo de la velocidad del satélite

El vector de posición del satélite es

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

y el vector velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r). \quad (3.9)$$

El satélite sigue una órbita kepleriana, pero sus elementos orbitales van variando con el tiempo a causa de la perturbación. Entonces será aceptable usar la ecuación de la elipse para describir la órbita

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

donde a es el semieje mayor y e la excentricidad. El módulo del momento angular L del satélite de masa m cumple la relación

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

el punto significa derivación respecto al tiempo. Desarrollando (3.9) queda

$$\mathbf{v} = \frac{L/m}{a(1-e^2)} [(-\sin u - e\sin\omega)\mathbf{e}_x + (\cos u + e\cos\omega)\mathbf{e}_y].$$

Para la órbita kepleriana se cumple

$$\frac{L^2}{mk} = a(1-e^2)$$

donde $k = GMm$, siendo M la masa del cuerpo central.

Al expresar la velocidad en función de los vectores básicos del sistema K queda

$$\mathbf{v} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} [(-\sin u - e\sin\omega)\mathbf{e}_x + (\cos u + e\cos\omega)\cos i\mathbf{e}_y + (\cos u + e\cos\omega)\sin i\mathbf{e}_z] \quad (4.9)$$

donde n es el movimiento medio definido por

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

siendo T el periodo orbital.

4.9 Aceleración perturbatriz de Einstein

Vamos a calcular cada uno de los términos que aparecen en la aceleración perturbatriz \mathbf{W}_E , el primero de ellos es

$$\mathbf{W}_{E1} = -\nabla\left(\frac{2\phi^2}{c^2}\right) = -\frac{4\phi}{c^2}\nabla\phi = \frac{4GM}{c^2r}\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r = \frac{4G^2M^2}{c^2r^3}\mathbf{e}_r.$$

Para calcular el segundo término de \mathbf{W}_E hay que tener en cuenta que el cálculo lo hacemos en el sistema K' , entonces

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \left[(-\sin u - e\sin\omega)\frac{\partial}{\partial X} + (\cos u + e\cos\omega)\frac{\partial}{\partial Y} \right]$$

por tanto

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi &= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \frac{GM}{r^3} [(-\sin u - e \sin \omega)X + (\cos u + e \cos \omega)Y] = \\ &= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \frac{GM}{r^3} [(-\sin u - e \sin \omega)r \cos u + (\cos u + e \cos \omega)r \sin u] \end{aligned}$$

después de un cálculo simplificador se encuentra que la segunda aceleración perturbativa es

$$\mathbf{W}_{E2} = 4 \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi = \frac{4GMe}{c^2 r^2} \left(\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \left[\begin{array}{l} (-\sin u - e \sin \omega) \mathbf{e}_x + \\ + \cos^2 i (\cos u + e \cos \omega) \mathbf{e}_y + \\ + \sin i (\cos u + e \cos \omega) \mathbf{e}_z \end{array} \right] \sin \theta .$$

Finalmente la tercera de las aceleraciones que producen la perturbación planetaria de Einstein es

$$\mathbf{W}_{E3} = -\frac{v^2}{c^2} \nabla \phi = -\frac{GM}{c^2 r^2} \left(\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \right) (1+e^2 + 2e \cos \theta) \mathbf{e}_r .$$

Vamos a calcular las componentes radial, transversal y longitudinal de la aceleración perturbatriz de Einstein, que son elementos necesarios para el cálculo de la variación de los elementos orbitales del satélite. La componente normal de la aceleración es

$$W_E^n = \mathbf{W}_E \cdot \mathbf{e}_n = 0$$

puesto que \mathbf{e}_n es normal tanto a \mathbf{e}_r como a \mathbf{v} . La componente radial se obtiene multiplicando \mathbf{W}_E por la primera de las ecuaciones (2.9) y después de las simplificaciones queda

$$W_E^r = \mathbf{W}_E \cdot \mathbf{e}_r = \frac{4G^2 M^2}{c^2 r^3} + \frac{4GM}{c^2 r^2} \left(\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \sin^2 \theta - \frac{GM}{c^2 r^2} \left(\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 (1+e^2 + 2e \cos \theta),$$

finalmente la componente transversal es

$$W_E^t = \mathbf{W}_E \cdot \mathbf{e}_t = \frac{4GMe}{c^2 r^2} \left(\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \sin \theta (1+e \cos \theta) .$$

Estas aceleraciones habrá que sustituirlas en las ecuaciones de Gauss que nos dan la variación temporal de los elementos orbitales del planeta y que son

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[eW^r \sin \theta + \frac{a(1-e^2)}{r} W^t \right] \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[W^r \sin \theta + W^t \left(\cos \theta + \frac{1}{e} - \frac{r}{ae} \right) \right] \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} W^n \cos u \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} W^n \sin u \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -W^r \cos \theta + \left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right] W^t \sin \theta \right\} - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \end{aligned} \quad (5.9)$$

- *Cálculo de la variación de la longitud del nodo ascendente.*

Como la componente normal de la aceleración perturbatriz es nula, también lo será la variación de la longitud del nodo ascendente

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0$$

esto significa que el plano de la órbita no varía con relación al ecuador. O dicho de otra forma que no varía el momento angular de rotación del satélite, que siempre tiene que ser perpendicular al plano orbital. Los nodos orbitales, por tanto, siempre están situados en la misma posición del ecuador.

- *Cálculo de la variación del argumento de latitud del pericentro.*

De (5.9) y de los valores de la aceleración perturbatriz se obtiene

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[\begin{aligned} & -\frac{4G^2M^2 \cos \theta}{c^2 r^3} - \frac{4GM}{c^2} \left(\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^2} + \\ & + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \frac{1+e^2+2e \cos \theta}{r^2} \cos \theta + \\ & + \frac{4GMe}{c^2} \left(\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \frac{(1+e \cos \theta) \sin^2 \theta}{r^2} + \\ & + \frac{4GMe}{c^2} \left(\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \frac{1}{a(1-e^2)} \frac{(1+e \cos \theta) \sin^2 \theta}{r} \end{aligned} \right]$$

pero lo que nos interesa no es el valor instantáneo de la variación, sino el valor promedio. Por tanto vamos a obtener el valor de la variación del argumento de latitud del pericentro en un periodo. Para ello es necesario hallar el valor medio en un periodo de las expresiones encerradas en el corchete. En el primer sumando tendremos

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\cos \theta}{r^3} \right)} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos \theta}{r^3} dt - \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} - \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} \frac{d\theta}{L/mr^2} - \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} d\theta = \\ &= \frac{m}{TL} \frac{1}{a(1-e^2)} \int_0^{2\pi} \cos \theta (1+e \cos \theta) d\theta = \frac{\pi me}{TL a(1-e^2)}, \end{aligned}$$

la misma técnica es aplicable a los otros valores medios, obteniéndose

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^2} \right)} &= 0; \quad \overline{\left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)} = 0; \quad \overline{\left(\frac{\cos^2 \theta}{r^2} \right)} = \frac{\pi m}{TL} \\ \overline{\left(\frac{(1+e \cos \theta) \sin^2 \theta}{r^2} \right)} &= \frac{\pi m}{TL}, \quad \overline{\left(\frac{(1+e \cos \theta) \sin^2 \theta}{r} \right)} = \frac{\pi ma(1-e^2)}{TL}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{L}{m} = \sqrt{GMa} \sqrt{1-e^2}$$

nos queda

$$\overline{\left(\frac{d\omega}{dt} \right)} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2) T}$$

que es la conocida precesión de Einstein.

Si se aplican las ecuaciones de Gauss a los otros elementos orbitales y luego se calculan los valores medios a lo largo de un periodo se encuentra

$$\overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} = 0; \quad \overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} = 0; \quad \overline{\left(\frac{di}{dt}\right)} = 0.$$

5.9 Cálculo de la aceleración perturbativa gravitomagnética

La perturbación de Einstein es ocasionada por el campo gravitoelectrónico estático. Pero la rotación del cuerpo central produce fenómenos de inducción que originan perturbaciones planetarias. Debemos de distinguir las perturbaciones gravitomagnéticas, que a continuación estudiamos, y las perturbaciones gravitoelectrónicas inductivas, producidas por el potencial gravitoelectrónico inductivo ψ .

Si consideramos que la rotación del astro central se mantiene en el tiempo, el primer sumando de (1.9) no hay que considerarlo, ya que es nulo.

La intensidad de campo gravitomagnético \mathbf{B} para el caso de un cuerpo central esférico, de densidad uniforme y de momento angular de rotación \mathbf{J} es dada a partir de (2.5)

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{G}{2r^5 c^2} [r^2 \mathbf{J} - 3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})]$$

como

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r; \quad \mathbf{J} = J\mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{J} = rJ \sin i \sin u,$$

el campo gravitomagnético queda

$$\mathbf{B} = \frac{G}{2r^3 c^2} \left[-3 \sin i \sin u \cos u \mathbf{e}_x - 3 \sin i \cos i \sin^2 u \mathbf{e}_y + (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u) \mathbf{e}_z \right].$$

Haciendo uso de la expresión de la velocidad dada por (4.9) se encuentra que la aceleración perturbatriz gravitomagnética (1.9) es

$$\mathbf{W}_{GM} = \frac{2GnaJ}{r^3 c^2 \sqrt{1-e^2}} \left[\begin{array}{l} \cos i (\cos u + e \cos \omega) \mathbf{e}_x + \\ \left(\begin{array}{l} \sin u + e \sin \omega - 3 \sin^2 i \sin^3 u - 3e \sin^2 i \sin \omega \sin^2 u - \\ -3e \sin^2 i \cos \omega \sin u \cos u - 3 \sin^2 i \sin u \cos^2 u \end{array} \right) \mathbf{e}_y + \\ \left(\begin{array}{l} 3 \sin i \cos i \sin^3 u + 3e \sin i \cos i \sin \omega \sin^2 u + \\ + 3e \sin i \cos i \cos \omega \sin u \cos u + 3 \sin i \cos i \sin u \cos^2 u \end{array} \right) \mathbf{e}_z \end{array} \right] \quad (6.9)$$

de donde se derivan las componentes radial, transversal y normal de la aceleración perturbatriz gravitomagnética

$$W_{GM}^r = \mathbf{W}_{GM} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{2GnaJ}{c^2 \sqrt{1-e^2}} \cos i \frac{1+e \cos \theta}{r^3}$$

$$W_{GM}^t = \mathbf{W}_{GM} \cdot \mathbf{e}_t = -\frac{2GnaJ}{c^2 \sqrt{1-e^2}} e \cos i \frac{\sin \theta}{r^3}$$

$$W_{GM}^n = \mathbf{W}_{GM} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{2GnaJ}{c^2 \sqrt{1-e^2}} \sin i \frac{1}{r^3} \left[\begin{array}{l} 2 \cos \omega \sin \theta + 2 \sin \omega \cos \theta - \\ -e \sin \omega + 3e \sin \omega \cos^2 \theta \end{array} \right].$$

6.9 Variación secular de los elementos orbitales por efecto del gravitomagnetismo

Para obtener la variación temporal de los elementos orbitales se hace uso de las ecuaciones de Gauss (5.9), pero lo que nos interesa son las variaciones seculares, no los instantáneos. Para obtenerlas se promedian las expresiones anteriores durante un periodo. Así, por ejemplo, para la variación del semieje mayor encontramos

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{da}{dt}\right) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \left(\frac{da}{dt}\right) \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta = \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} \left(\frac{da}{dt}\right) r^2 d\theta = \\ &= \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} \left(\frac{da}{dt}\right) \left[\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \right]^2 d\theta, \end{aligned}$$

o bien podemos tratar el problema de obtener el valor medio, usando la anomalía excéntrica χ definida mediante

$$r = a(1 - e \cos \chi)$$

y usando las ecuaciones suplementarias

$$\cos \theta = \frac{\cos \chi - e}{1 - e \cos \chi}; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \chi}{1 - e \cos \chi}; \quad t = \frac{\chi - e \sin \chi}{n}; \quad dt = \frac{1 - e \cos \chi}{n} d\chi.$$

Al aplicar las ecuaciones de Gauss (5.9) y obtener los valores medios de los elementos orbitales se encuentra para la aceleración gravitomagnética estática

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} &= 0 \\ \overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} &= 0 \\ \overline{\left(\frac{di}{dt}\right)} &= 0 \\ \overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)} &= \frac{2GJ}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \\ \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} &= -\frac{6GJ \cos i}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Para obtener el movimiento del pericentro se le suma a la variación de la longitud del nodo ascendente la variación del argumento de latitud del pericentro. Pero nótese que ambos ángulos están medidos en planos diferentes. La longitud del nodo ascendente está medido en el plano del ecuador, es decir en un plano perpendicular a \mathbf{J} . El ángulo ω es medido en el plano orbital, que es perpendicular al momento angular de rotación \mathbf{L} . Para considerar esta situación se expresa la precesión del pericentro mediante el vector dado por

$$\mathbf{\Omega}_p = \frac{2GJ}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} [\mathbf{n}' - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')] \quad (7.9)$$

donde \mathbf{n} y \mathbf{n}' son los vectores unitarios en las direcciones y sentidos de \mathbf{L} y \mathbf{J} respectivamente.

El ángulo que se desplaza el pericentro se puede medir por el ecuador, valor que se obtendría por

$$\tilde{\omega} - \boldsymbol{\Omega}_p \cdot \mathbf{n}' = \frac{2GJ}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} (1 - \cos^2 i)$$

donde la inclinación i es el ángulo formado por los vectores \mathbf{n} y \mathbf{n}' .

De la ecuación (7.9) se desprende que son dos las contribuciones a la variación del pericentro del satélite. El primer sumando nos da la velocidad de rotación del plano orbital. Debe aparecer en (7.9) porque al variar el plano orbital varía también la posición del pericentro respecto al equinoccio. El segundo sumando de (7.9) es la variación del pericentro respecto al plano de la órbita.

El primer sumando de (7.9) es un ángulo que se dirige en el mismo sentido que la rotación del cuerpo central. Se interpreta diciendo que la rotación del astro central «arrastra» al plano orbital. Nótese que este arrastre es independiente del sentido de giro del satélite.

El segundo sumando de (7.9) nos dice que, si el astro gira en el mismo sentido que el satélite, el pericentro va al encuentro del satélite, es decir ambos movimientos son opuestos. Si se da la circunstancia de que el giro del astro y el del satélite son opuestos, entonces el movimiento del pericentro y el del satélite son del mismo sentido. En cualquiera de las dos situaciones anteriores, el movimiento del pericentro sería contrario al que tiene su origen en el movimiento del plano orbital.

7.9 Perturbaciones producidas por la variación del módulo del momento angular intrínseco del astro central

Supongamos un cuerpo de masa M alrededor del que orbita un satélite de masa m . Admitamos que el módulo del momento angular del cuerpo central varía linealmente con el tiempo

$$J = J_0 + J_1 t$$

permaneciendo constante su dirección y sentido, tal como ocurre en un astro que se va frenando por efecto de las mareas. Entonces los potenciales gravitoelectromagnéticos vienen dados por (1.6).

Por la ecuación de movimiento (12.4) se encuentra que las aceleraciones que perturban el movimiento kepleriano son

$$\mathbf{W}_1 = -4 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{W}_2 = 4 \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \quad (8.9)$$

se trata de encontrar la variación de los elementos orbitales del satélite de masa m .

Vamos a suponer que la rotación del astro central es alrededor del eje z , de tal forma que $\mathbf{J} = J \mathbf{e}_z$ como $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$, de (2.9) se obtiene

$$\mathbf{W}_1 = \frac{2GJ}{c^2 r^2} [-\cos i \sin u \mathbf{e}_x + \cos u \mathbf{e}_y].$$

La intensidad de campo gravitomagnético es dada por

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{G}{2c^2 r^5} [r^2 \mathbf{J} - 3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})]$$

haciendo uso de las ecuaciones (2.9) se encuentra

$$\mathbf{B} = \frac{GJ}{2c^2 r^3} \left[-3 \sin i \sin u \cos u \mathbf{e}_x - 3 \sin i \cos i \sin^2 u \mathbf{e}_y + (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u) \mathbf{e}_z \right]$$

y teniendo en cuenta la expresión de la velocidad del satélite tal como es dada por (4.9) se tiene para la segunda de las aceleraciones perturbatrices de (8.9) la expresión

$$\mathbf{W}_2 = \frac{2GnaJ}{c^2 r^3 \sqrt{1-e^2}} \left[\begin{array}{l} \cos i (\cos u + e \cos \omega) \mathbf{e}_x + \\ \left(\begin{array}{l} \sin u + e \sin \omega - 3 \sin^2 i \sin^3 \omega - 3e \sin^2 i \sin \omega \sin^2 u \\ -3e \sin^2 i \cos \omega \sin u \cos u - 3 \sin^2 i \sin u \cos^2 u \end{array} \right) \mathbf{e}_y + \\ \left(\begin{array}{l} 3 \sin i \cos i \sin^3 u + e \sin i \cos i \sin \omega \sin^2 u + \\ + 3e \sin i \cos i \cos \omega \sin u \cos u + 3 \sin i \cos i \sin u \cos^2 u \end{array} \right) \mathbf{e}_z \end{array} \right].$$

El siguiente paso consiste en la determinación de las componentes radiales de la aceleración perturbatriz

$$W_1^r = \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$$

$$W_2^r = \mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{e}_r = \frac{2GnaJ \cos i}{c^2 r^3 \sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos \theta) = \frac{2G \cos i \sqrt{1-e^2}}{c^2 a^2} \frac{nJ}{(1-e \cos \chi)^4},$$

las componentes transversales son

$$W_1^t = \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{e}_t = \frac{2G\dot{J}}{c^2 r^2} \cos i = \frac{2G\dot{J} \cos i}{c^2 a^2} \frac{1}{(1-e \cos \chi)^2}$$

$$W_2^t = -\frac{2GneJ \cos i}{c^2 a^2} \frac{\sin \chi}{(1-e \cos \chi)^4},$$

finalmente las componentes normales son

$$W_1^n = \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{e}_n = -\frac{2G\dot{J}}{c^2 r^2} \sin i \cos u = -\frac{2G\dot{J} \sin i}{c^2 a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{(1-e^2) \sin \omega \sin \chi + \sqrt{1-e^2} \cos \omega (e - \cos \chi)}{(1-e \cos \chi)^3}$$

$$W_2^n = \frac{2GnJ \sin i}{c^2 a^2 \sqrt{1-e^2}} \left[\frac{2 \sin \omega \cos \chi + 2 \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin \chi}{(1-e \cos \chi)^5} \right] -$$

$$-\frac{2GnJ \sin i}{c^2 a^2 \sqrt{1-e^2}} \left[\frac{3 \sin \omega + \sin \omega \cos^2 \chi + \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin \chi \cos \chi}{(1-e \cos \chi)^5} \right] e + O(e^2)$$

-Variación del semieje mayor de la órbita del satélite

Haciendo uso de las ecuaciones de Gauss (5.9) se determina la variación de los elementos orbitales por causa de las aceleraciones perturbatrices. Así el semieje mayor de la órbita del satélite por efecto de la aceleración \mathbf{W}_1 varía según

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[e W_1^r \sin \theta + \frac{a(1-e^2)}{r} W_1^t \right] = \frac{4aG\dot{J}\sqrt{1-e^2} \cos i}{c^2 n} \frac{1}{r^3},$$

para calcular la variación secular promediamos en un periodo orbital

$$\left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{r^3} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^3 \dot{\theta}} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^3 L/mr^2} =$$

$$= \frac{m}{TL} \frac{1}{a(1-e^2)} \int_0^{2\pi} (1+e \cos \theta) d\theta = \frac{2\pi m}{TL a(1-e^2)},$$

entonces la variación secular del semieje mayor es

$$\left(\frac{da}{dt} \right) = \frac{4G\dot{J}}{c^2 a^2 (1-e^2) n} \cos i = \frac{4GJ_1}{c^2 a^2 (1-e^2) n} \cos i$$

y si nos limitamos a primer orden en la excentricidad queda

$$\left(\frac{da}{dt} \right) = \frac{4G\dot{J}}{c^2 a^2 n} \cos i = \frac{4GJ_1}{c^2 a^2 n} \cos i.$$

Para calcular la variación que experimenta el semieje mayor por efecto de la aceleración perturbatriz \mathbf{W}_2 , hay que tener en cuenta que las perturbaciones se dividen en dos grupos, las originadas por J_0 y las producidas por J_1 . Ni una ni otra componente produce alteración en el semieje mayor de la órbita, que no tiene ni variación periódica ni secular.

-Variación de la excentricidad de la órbita del satélite.

El mismo procedimiento se usa para obtener la variación secular de la excentricidad que para el caso de la aceleración \mathbf{W}_1 su valor promedio es

$$\left(\frac{de}{dt} \right) = \frac{2G\dot{J} \cos i}{c^2 a^3 n e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \approx \frac{G\dot{J} \cos i}{c^2 a^3 n} e = \frac{GJ_1 \cos i}{c^2 a^3 n} e$$

y para la aceleración \mathbf{W}_2

$$\left(\frac{de}{dt} \right) = -\frac{2G \cos i J_1}{c^2 a^3 n} - \frac{2G \cos i J_1}{c^2 a^3 n} e$$

no ocasionando el término que contiene J_0 ninguna variación de la excentricidad.

-Variación de la inclinación de la órbita, de la longitud del nodo ascendente y del argumento de latitud del pericentro.

El resto de las variaciones seculares de los parámetros orbitales ocasionadas por la aceleración \mathbf{W}_1 son

$$\left(\frac{di}{dt} \right) = -\frac{G\dot{J} \sin i}{c^2 a^3 n} - \frac{GJ_1 \sin i}{c^2 a^3 n}; \quad \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) = 0; \quad \left(\frac{d\omega}{dt} \right) = 0,$$

para \mathbf{W}_2 y para la parte que contiene J_0 no hay variación en la inclinación de la órbita del satélite, pero el término que contiene J_1 produce la variación

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_1 = \frac{G \sin i J_1}{c^2 a^3 n} (1 - 2 \cos^2 \omega - 2e \cos^2 \omega)$$

mientras que la variación de la longitud del nodo ascendente es para los términos que contienen J_0 y J_1 respectivamente

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_0 = \frac{2G\dot{J}_0}{c^2 a^3}; \quad \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_1 = \frac{2GJ_1}{c^2 a^3 n} \left[\pi - \frac{1}{2}(1+e) \sin 2\omega \right]$$

Reuniendo todos los resultados se llega a la conclusión de que la variación secular de los parámetros orbitales de un satélite que gira en torno a un astro a consecuencia de la variación de su momento angular de rotación es

$$\begin{aligned}
 \overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} &= \frac{4GJ_1}{c^2 a^2 n} \cos i \\
 \overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} &= -\frac{G \cos i J_1}{c^2 a^3 n} (2+e) \\
 \overline{\left(\frac{di}{dt}\right)} &= -\frac{2GJ_1 \sin i}{c^2 a^3 n} (1+e) \cos^2 \omega \\
 \overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)} &= \frac{2GJ_1}{c^2 a^3 n} \left[\pi - \frac{1}{2}(1+e) \sin 2\omega \right] + \frac{2GJ_0}{c^2 a^3} \\
 \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} &= -\frac{GJ_1 \cos i}{c^2 a^3 n} [7\pi - (1+e) \sin 2\omega] - \frac{6GJ_0 \cos i}{c^2 a^3}.
 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Nótese que tanto Ω como en ω aparece un término dependiente de J_0 . Este término ya está contemplado en los resultados de 6.9.

8.9 Perturbaciones producidas por la variación de la masa del astro central

La aceleración perturbatriz producida por un astro que se ve sometido a una variación lineal de la masa, es dada por la expresión (8.6), donde se encuentra, tanto las perturbaciones clásicas como las relativistas. Comencemos por analizar las perturbaciones de origen clásico. De (8.6) vemos que la única componente que existe es la radial

$$W_{cla}^r = -G \frac{M_1 t}{r^2},$$

que produce una variación del semieje mayor dado por

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} e W_{cla}^r \sin \theta = -\frac{2GM_1 e}{n\sqrt{1-e^2}} \frac{t \cos \theta}{r^2}$$

lo que nos interesa es el valor medio a lo largo de un periodo, obteniéndose hasta el segundo orden de la excentricidad

$$\overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} = 2ae(1+e) \frac{M_1}{M}.$$

En cuanto a la variación de los restantes elementos se encuentra

$$\overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} = (1+e+e^2) \frac{M_1}{M}; \quad \frac{di}{dt} = 0; \quad \frac{d\Omega}{dt} = 0; \quad \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = 0.$$

A continuación vamos a determinar las componentes de la aceleración perturbatriz de origen relativista debidas a la variación de la masa del astro y que según (8.6) tienen las componentes intrínsecas

$$\begin{aligned}
 W_M^r &= -\frac{3nae}{c^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{GM_1}{r} \sin \theta \\
 W_M^t &= -\frac{3nae}{c^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{GM_1}{r} (1+e \cos \theta)
 \end{aligned}$$

$$W_M^n = 0$$

lo que nos permite determinar la variación que experimentan los elementos orbitales de un satélite que orbita el astro a partir de las ecuaciones de Gauss (5.9). A consecuencia de que la componente normal de la aceleración perturbatriz es nula se cumplirá

$$\frac{di}{dt} = 0; \quad \frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

A primer orden en la excentricidad los resultados de las perturbaciones de los restantes elementos orbitales son

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} &= 0 \\ \overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} &= -\frac{6GM_1 e}{c^2} \\ \overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} &= \frac{3GM_1}{c^2 a} (1 - e/2). \end{aligned}$$

9.9 Perturbaciones producidas por la variación de la orientación del eje de rotación del astro central

Vamos a considerar un astro (que concretaremos en la Tierra) cuyo eje de rotación está sometido a una precesión de velocidad ω_p . Sea el sistema de coordenadas K_0 , definido tal que su eje z_0 sea perpendicular al plano de la eclíptica y dirigido hacia el polo norte eclíptico y que en el momento presente (que tomaremos como origen del tiempo), el equinoccio de primavera o nodo ascendente de la órbita terrestre, se encuentra en la parte positiva del eje x_0 , siendo por tanto el plano x_0 - y_0 el de la eclíptica. A los vectores básicos unitarios de este sistema lo denominaremos $\mathbf{e}_x^0, \mathbf{e}_y^0, \mathbf{e}_z^0$.

Seguimos considerando el sistema de coordenadas K' tal como fue definido en el epígrafe 2.9, representando su plano X - Y el de la órbita del satélite cuya variación secular de sus parámetros orbitales se trata de determinar. Las ecuaciones (2.9) se adaptan a nuestro problema actual y representan la transformación entre los vectores básicos de K_0 y del triedro intrínseco. Ahora el ángulo i' es la inclinación de la órbita del satélite respecto a la eclíptica, Ω' representa la longitud eclíptica del nodo ascendente del satélite, o sea el punto de corte de la órbita ascendente con la eclíptica, finalmente ω' es el ángulo desde este nodo eclíptico al pericentro de la órbita. Vamos a considerar, por simplificación, que en el momento presente $t = 0$ el nodo ascendente de la órbita coincide con el equinoccio, o sea vamos a suponer que $\Omega' = 0$. Este no es un caso general pero nos permitirá obtener una idea del valor de la perturbación creada por la precesión del eje de rotación terrestre.

Lo vectores unitarios radial, tangencial y normal están relacionados con los vectores unitarios de K_0 por la relación (2.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos u \mathbf{e}_x^0 + \cos i \sin u \mathbf{e}_y^0 + \sin i' \sin u \mathbf{e}_z^0 \\ \mathbf{e}_t &= -\sin u \mathbf{e}_x^0 + \cos i' \cos u \mathbf{e}_y^0 + \sin i' \cos u \mathbf{e}_z^0 \\ \mathbf{e}_n &= -\sin i' \mathbf{e}_y^0 + \cos i' \mathbf{e}_z^0. \end{aligned}$$

el ángulo u sigue siendo el mismo que antes, es decir la suma del argumento de latitud del pericentro y de la anomalía verdadera ($u = \omega' + \theta$).

Bajo las condiciones dadas, el vector momento angular de rotación del astro central respecto al sistema K_0 es

$$\mathbf{J} = J \sin \varepsilon \sin \omega_p t \mathbf{e}_x^0 + J \sin \varepsilon \cos \omega_p t \mathbf{e}_y^0 + J \cos \varepsilon \mathbf{e}_z^0$$

con ε representando la oblicuidad de la eclíptica. Nótese el sentido de la velocidad angular de precesión, que está dirigida hacia la parte negativa del eje z_0 , tal como corresponde a una retrogradación de los nodos terrestres. La variación temporal del momento angular \mathbf{J} es

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = J \omega_p \sin \varepsilon \cos \omega_p t \mathbf{e}_x^0 - J \omega_p \sin \varepsilon \sin \omega_p t \mathbf{e}_y^0 \approx J \omega_p \sin \varepsilon \mathbf{e}_x^0,$$

hemos tenido en cuenta la extrema pequeñez de la velocidad de precesión terrestre ω_p y que el instante t es cercano al momento inicial. En efecto, podemos despreciar ω_p^2 (entonces $\sin \omega_p t \approx \omega_p t$) e identificamos $\cos \omega_p t \approx 1$. Con esta simplificación ya podemos utilizar (9.6) porque ahora \mathbf{J} tiene una variación lineal. De (9.6) se obtiene

$$\mathbf{W} = -\frac{2G}{c^2 r^3} J \omega_p \sin \varepsilon \sin u (\sin i' \mathbf{e}_y^0 - \cos i' \mathbf{e}_z^0)$$

de donde se derivan las componentes intrínsecas de la aceleración perturbatriz para el momento presente

$$W^r = 0$$

$$W^t = 0$$

$$W^n = \frac{2G}{c^2 r^2} J \omega_p \sin \varepsilon \sin u.$$

Al aplicar las ecuaciones de Gauss (5.9) se determinan cómo varían secularmente las componentes orbitales del satélite

$$\overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} = 0$$

$$\overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} = 0$$

$$\overline{\left(\frac{di'}{dt}\right)} = 0$$

(10.9)

$$\overline{\left(\frac{d\Omega'}{dt}\right)} = \sqrt{\frac{G}{M}} \frac{J \omega_p \sin \varepsilon}{c^2 a^{3/2} \sin i'}$$

$$\overline{\left(\frac{d\omega'}{dt}\right)} = -\sqrt{\frac{G}{M}} \frac{J \omega_p \sin \varepsilon}{c^2 a^{3/2} \tan i'}$$

(10.9) nos informa que el plano orbital del satélite está sometido a una precesión de sus nodos, sin alterarse la inclinación de la órbita ni su forma. Recuérdese que el ángulo i' es la inclinación eclíptica de la órbita, Ω' es la longitud eclíptica del nodo ascendente de la órbita del satélite, referida a un equinoccio fijo y ω' es el ángulo medido desde este nodo al pericentro de la órbita. También hay que tener presente que las fórmulas (10.9)

son válidas respecto a un sistema de referencia eclíptico fijo en una época, es decir que no está girando a medida que se desplaza el equinoccio. Por último, la validez de (10.9) se extiende a los momentos cercanos a la fecha elegida para definir el sistema eclíptico de referencia.

En el caso especial que estamos considerando (en que inicialmente $\Omega = 0$), tanto la eclíptica, como el ecuador celeste y la órbita forman un pequeño triángulo plano. Para esta situación se encuentra una simple relación entre los elementos orbitales referidos al ecuador celeste fijo y a la eclíptica, como se ve en la figura 1.9.

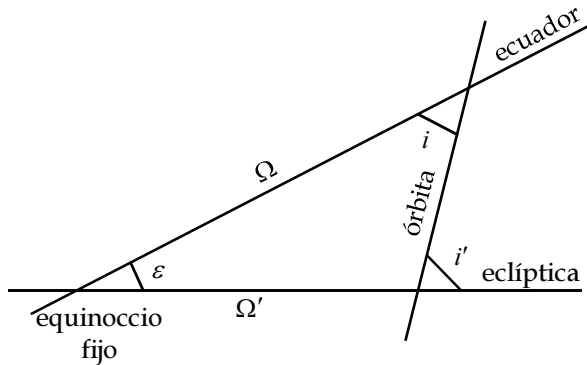


Figura 1.9

Aplicando el teorema del seno se encuentra

$$\Omega = \Omega' \frac{\sin(i + \varepsilon)}{\sin i}$$

donde i es la inclinación de la órbita del satélite respecto al ecuador que cumple la relación $i' = i + \varepsilon$.

10.9 Perturbaciones provocadas por la interacción del momento angular intrínseco del satélite y el campo gravitomagnético

Según se discutió en el epígrafe 9.7 existe una interacción entre el momento angular intrínseco de un satélite J' y el campo gravitomagnético producido por la rotación del astro central de momento angular J . Las variaciones seculares de la longitud del nodo ascendente y del argumento de latitud del pericentro del satélite son del orden

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) \sim \left(\frac{d\omega}{dt}\right) \sim \sqrt{\frac{G}{M}} \frac{JJ'}{c^2 ma^{7/2}} \quad (11.9)$$

que para el caso de Mercurio da el valor $2.4 \cdot 10^{-29} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 1.6 \cdot 10^{-14} \text{ } \cdot \text{siglo}^{-1}$ muy por debajo de la perturbación gravitomagnética encontrada en el epígrafe 6.9.

11.9 Perturbaciones provocadas por la inducción gravitoeléctrica

Además de la inducción gravitomagnética que acabamos de analizar, existe una inducción gravitoeléctrica, igualmente de segundo orden respecto a la inversa de c . Esta última está compuesta de dos partes: de términos de segundo orden del desarrollo de ϕ (23.4) y del potencial ψ dado por la segunda ecuación (17.4).

Para el caso de un cuerpo que rota alrededor de su eje, los citados términos inductivos gravitoelectríficos depende de su velocidad angular al cuadrado ω'^2 . Pero siendo pequeños estos efectos gravitoelectríficos, son menores que los gravitomagnéticos, razón por la que han sido despreciados. Pero hay que advertir que estos efectos son de segundo orden respecto a la inversa de c y que en condiciones óptimas pueden tener valores similares a la acción perturbativa gravitomagnética.

La aceleración perturbativa procedente de la gravitoelectricidad inductiva para el caso de una esfera homogénea viene dada por (6.8), de donde podemos deducir las aceleraciones radial, normal y tangencial

$$\begin{aligned}
 W_{CE}^r &= -\frac{4}{5} \frac{GM\omega'^2 R^2}{c^2} \frac{1}{r^2} \left[1 + \frac{3}{14} \frac{R^2}{r^2} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u) \right] \\
 W_{CE}^n &= -\frac{12}{35} \frac{GM\omega'^2 R^4}{c^2} \sin i \cos i \frac{\sin u}{r^4} \quad (12.9) \\
 W_{CE}^t &= -\frac{12}{35} \frac{GM\omega'^2 R^4}{c^2} \sin^2 i \frac{\sin u \cos u}{r^4}
 \end{aligned}$$

donde R , M y ω' son el radio, la masa y la velocidad angular de rotación del astro central que produce la gravitoelectricidad. Ahora es necesario aplicar las ecuaciones de Gauss (5.9) a la aceleración perturbatriz (12.9) para hallar la variación secular de los parámetros orbitales de un satélite, que resultan ser

$$\begin{aligned}
 \overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} &= 0 \\
 \overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} &= 0 \\
 \overline{\left(\frac{di}{dt}\right)} &= 0 \quad (13.9) \\
 \overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)} &= -\frac{12\pi}{35} \frac{\omega'^2 R^4}{c^2} \frac{\cos i}{Ta^2(1-e^2)^2} \\
 \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} &= \frac{24\pi}{35} \frac{\omega'^2 R^4}{c^2} \frac{1}{Ta^2(1-e^2)^2} \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 i (1 + 3 \cos^2 \omega) \right].
 \end{aligned}$$

Una aplicación numérica para los planetas del sistema solar, nos muestra que las variaciones de (13.9) son muchos órdenes de magnitud menor que el correspondiente efecto gravitomagnético. Por tanto, despreciable para estos astros, a consecuencia del débil efecto gravitoelectrífico producido por la rotación del Sol.

No obstante, hay que advertir que para astros centrales que tengan una elevada velocidad de rotación, los efectos gravitoelectríficos pueden ser del orden de los gravitomagnéticos.

12.9 Referencias

1.- RUGGIERO, Matteo Luca; IORIO, Lorenzo: «Gravitomagnetic time-varying on the motion of a test particle», *General Relativity and Gravitation* 42-10 (2010) 2393-2402.

2.- IORIO, Lorenzo: «A gravitomagnetic effect on the orbit of a test body due to the earth's variable angular momentum», *International Journal of Modern Physics D*11-5 (2002) 781-787.